MODELAÇÃO DA ELASTICIDADE DE QUOTAS DE MERCADO PARA PRODUTOS DE GRANDE CONSUMO

Armando Brito Mendes *
Isabel Themido **

1 — Introdução

Num ambiente competitivo torna-se por vezes mais importante saber quanto se vende, relativamente aos restantes concorrentes, do que conhecer a quantidade vendida, em termos absolutos, sem qualquer padrão de comparação. Deste interesse nasce o conceito de quota de mercado, que é hoje um elemento essencial na gestão de produtos, especialmente em mercados maduros caracterizados por uma grande quantidade de marcas em fase de saturação do seu ciclo de vida (Oral e Kettani, 1989).

É importante referir que a quota de mercado reflecte, de uma forma mais acentuada do que as vendas, tanto alterações nas variáveis de *marketing* do próprio artigo como os factores competitivos entre marcas. Quanto à modelação de séries cronológicas, Naert e Leeflang (1978) referem duas ordens de razões para a utilização de quotas de mercado. Estas possibilitam, por um lado, a distinção entre variações nas vendas resultantes do aumento da procura do produto das resultantes de mudanças na posição relativa de uma marca no mercado; e por outro, evitam a consideração de factores ambientais ou sazonalidades, tornando os modelos muito mais simples ([1]).

A dificuldade na definição de *quota de mercado,* reside na ambiguidade do termo mercado, que não tem aqui o significado comum de um conjunto de consumidores. Pode definir-se quota de mercado como a fracção de vendas reais (tanto em quantidade como em valor monetário) de um artigo relativamente aos restantes da mesma família, para um determinado período, e para uma determinada área geográfica (Cooper e Nakanishi, 1988).

No presente estudo *mercado* significa o volume de vendas de um conjunto de marcas e ou produtos em concorrência directa que, satisfazendo idênti-

---

* Universidade dos Açores — Departamento de Matemática.

** Instituto Superior Técnico — CESUR.

([1]) Barroso (1994) apresenta uma modelo provisional para uma série de vendas agregada para a família onde a modelação de sazonalidades é, de longe, o ponto de maior complexidade.

Note-se ainda que, considerar que a relativização das vendas elimina sazonalidades, corresponde a considerar que estas últimas podem ser modeladas por factores multiplicativos (como aliás se considera no trabalho de Barroso) e que estes são aproximadamente iguais para as diferentes marcas. Estes pressupostos são geralmente aceites pela maioria dos autores e foram comprovados para o caso de estudo apresentado neste trabalho.

cas necessidades do consumidor, são portanto substituíveis (a que se chama *família* ou *subfamília* de produtos).

Da anterior definição resulta a equação seguinte:

$$m_i = \frac{Q_i}{Q} \tag{1}$$

onde m_i representa a quota de mercado do artigo i, Q_i as vendas em quantidade ou valor desse artigo, para um espaço geográfico e num período de tempo ([2]), e Q o total de vendas nas mesmas unidades para a família. Da definição anterior resulta ainda que a soma das vendas para os n artigos na família deve totalizar Q, ou, o que é o mesmo:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = 1 \tag{2}$$

constituindo esta uma relação fundamental na teoria das quotas de mercado.

Pode encontrar-se na literatura uma grande variedade de modelos (ainda que habitualmente previsionais) de quotas de mercado. Neste trabalho consideram-se apenas modelos causais a desenvolver com base exclusivamente em séries cronológicas de vendas e variáveis de *marketing*. Estes modelos usam dados muito mais fáceis de obter do que os referentes ao comportamento individual de cada consumidor, ou classe de consumidores, exigidos, por exemplo, pelos modelos baseados na teoria de jogos sugeridos por Oral e Kettani (1989), entre outros.

Com este trabalho pretende-se contribuir para a utilização da elasticidade na análise do mercado utilizando quotas de mercado. A importância da elasticidade deriva não só de ser uma medida da sensibilidade das quotas de mercado a variações das diferentes variáveis de *marketing*, como também de ser uma medida universal, independente da forma funcional escolhida para a modelação. Para isso é necessário deduzir expressões para a elasticidade para os vários modelos alternativos de quota de mercado.

Na secção 2 apresentam-se os vários modelos causais para quotas de mercado, bem como as expressões alternativas para relativizar variáveis de *marketing*. Na secção seguinte deduzem-se as expressões para as elasticidades directas e cruzadas para cada combinação modelo/expressão de relativização e analisa-se a robustez das referidas expressões. Apresenta-se depois um exemplo de aplicação seguido das conclusões. Em anexo é possível encontrar a dedução das expressões para as elasticidades elaboradas pelos autores.

([2]) Dispensa-se o índice t, indicativo da dependência temporal, para simplificação das equações apresentadas.

2 — Modelos causais de quota de mercado

De entre os modelos causais referidos na literatura destacam-se duas principais classes. A primeira dessas classes inclui os modelos baseados no conceito de atracção (ou esforço de *marketing*), deduzidos por Bell, Keeney e Little (1975) e com uma diferente formulação por Kotler (1984), e logicamente apoiados num conjunto de axiomas. Bell *et al.* provam ainda que tais axiomas conduzem necessariamente a:

$$m_i = \frac{\alpha_i \, . \, A_i}{\sum_{l=1}^{n} \alpha_l \, . A_l} \qquad (3)$$

onde α_l (introduzido para maior generalidade) representa o grau de eficiência do artigo *i* em transformar a sua atractividade (A_i) em quota de mercado (m_i). Esta expressão implica que, mesmo que seja sentida a mesma atractividade (ou originalmente seja produzido o mesmo esforço de *marketing*) em dois artigos distintos, eles podem não ter a mesma quota de mercado.

Considerando agora que o esforço de *marketing* para o artigo é uma função das variáveis de *marketing* é possível estabelecer modelos causais para as quotas de mercado. Quanto à forma funcional a adoptar a literatura menciona dois modelos principais, indicados em seguida ([3]):

«Multiplicative competitive interaction model» (MCI):

$$A_i = \prod_k X_{ik}^{\beta_{ik}} \qquad (4)$$

«MultiNomial logit model» (MNL):

$$A_i = \exp \left(\sum_k \beta_{ik} \cdot X_{ik}\right) \qquad (5)$$

onde o conjunto dos β representa parâmetros do modelo e X representa as variáveis de *marketing* consideradas relevantes na explicação de variações da atractividade.

A segunda classe de modelos corresponde a modelos menos fundamentados e já extensivamente utilizados antes de 1975. Estes modelos, que consideram apenas relações entre a quota de uma marca e as respectivas varáveis de *marketing*, serão referidos neste trabalho por modelos clássicos. Vários são os referidos na literatura, tendo-se seleccionado apenas os quatro seguintes, largamente utilizados:

Modelo aditivo:

$$m_i = \alpha_i + \sum_k \beta_{ik} \cdot X_{ik} \qquad (6)$$

([3]) Nestes modelos exclui-se o termo correspondente ao resíduo.

Modelo semilogarítmico:

$$m_i = \alpha_i + \sum_k \beta_{ik} \cdot \ln X_{ik} \tag{7}$$

Modelo multiplicativo:

$$m_i = \alpha_i \cdot \prod_k X_{ik}^{\beta_{ik}} \tag{8}$$

Modelo exponencial:

$$m_i = \exp\,(\alpha_i + \sum_k \beta_{ik} \cdot X_{ik}) \tag{9}$$

O parâmetro α_i é designado por *constante de atracção intrínseca* já que mede a preferência intrínseca dos consumidores pelo artigo *i*, *i. e.* a fracção de quota de mercado que é independente do valor das variáveis de *marketing* consideradas no modelo.

Em geral, os dois últimos modelos são considerados mais apelativos, uma vez que têm em conta interacções entre as diferentes variáveis de *marketing* utilizadas. No entanto, todos eles são largamente utilizados especialmente na modelação da quota de mercado para uma única marca, na perspectiva do fabricante (v. por exemplo as referências apresentados por Brodie e De Kluyver, 1984; ou a longa lista apresentada por Naert e Leeflang, 1978, p. 75).

2.1 — Relativização de variáveis de *marketing*

Themido (1984) desenvolveu um modelo de previsão de vendas para famílias de produtos em que se verifica substituição entre marcas e grande variabilidade nas vendas. Após uma análise detalhada, observa-se que as vendas de uma marca dependem dos valores das variáveis de *marketing* de todas as marcas na família; concluindo que a percepção do consumidor às operações de *marketing* é relativa, *i. e.* o consumidor atribui muita importância ao factor distinção. Cooper e Nakanishi, no seu trabalho de 1988, apoiam estas conclusões apresentando mesmo o exemplo de uma família de produtos alimentares onde o poder nutritivo é uma variável essencial na distinção entre os diferentes itens na família. Estes autores concluem que os consumidores tendem a decidir com base nos atributos mais salientes (ainda que por vezes pouco importantes) do artigo.

Tem-se assim uma íntima relação entre o grau de distinção e as vendas do artigo. Para incluir esta relação nos modelos clássicos, pode efectuar-se uma relativização das variáveis de *marketing*, segundo os produtos na família. Pretende-se com esta operação que uma alteração na variável relativizada corresponda a uma acção de distinção por parte de uma marca, logo devendo ter consequências no valor da quota de mercado dessa marca. Isto significa que se todas as marcas baixarem o preço de um produto, por razões comuns, certamente a quota de mercado desses não deve sofrer alterações; ainda que as vendas totais da família possam aumentar por os clientes constituírem *stock*. Caso uma marca baixe o preço, durante uma promoção, e as restantes marcas na família não a sigam, o preço passa a ser um factor de distinção, devendo a variável relativizada ser consideravelmente alterada tal como a correspondente quota de mercado. A importância da relativização das variáveis explicativas é tanto maior quanto mais competitiva for a família.

Note-se que a utilização de preços relativizados vem já de longe, constituindo hoje prática generalizada, embora existam outros métodos para introduzir o efeito da concorrência nos modelos clássicos. O método mais referido na literatura, consiste na inclusão de todas as variáveis de *marketing* de todas as marcas, no modelo de cada uma. Estes modelos, denominados modelos extensivos ou completos, além da complexidade resultante de ser necessário estimar um grande número de parâmetros, apresentam problemas de multicolinearidade entre as muitas variáveis explicativas. A relativização das variáveis de *marketing* surge assim como um método expedito, ainda que não perfeito, de introduzir a concorrência nos modelos.

Apresentamos seguidamente um conjunto de expressões de relativização, compiladas por Luzes (1995), largamente utilizadas em modelos de previsão de vendas, ainda que, frequentemente, para uma só marca e apenas na óptica do fabricante.

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik}}{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} X_{lk}} \tag{10}$$

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik}}{\sum_{l=1}^{n} m_l \cdot X_{lk}} \tag{11}$$

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik}}{\left(\frac{\sum_{\substack{l \neq i \\ l=1}}^{n} m_l \, . \, X_{lk}}{\sum_{\substack{l \neq i \\ l=1}}^{n} m_l}\right)} \tag{12}$$

onde X_{ik} representa a variável de *marketing* k referente à marca i e X_{ik}^{*} a mesma variável depois de relativizada. Os símbolos m_l representam as quotas de mercado referentes à marca l.

A primeira expressão dá igual peso, no denominador, a todos os artigos. As expressões seguintes já consideram uma média ponderada atribuindo um peso proporcional à importância do artigo no mercado. A utilização dos pesos parece logicamente preferível, já que para famílias de produtos com grandes diferenças no volume de vendas entre as várias marcas, é pouco realista considerar que todas elas contribuem de igual modo para a variável de *marketing* na família ([4]). A última expressão, proposta por Themido (1984), não inclui o artigo *i* no denominador. Isto significa que o consumidor compara o preço do artigo que compra com o das outras marcas, sem incluir neste conjunto de referência o artigo comprado. A autora afirma que a diferença entre as expressões **(11)** e **(12)** se acentua nos artigos líder, que têm frequentemente um comportamento *sui generis*. Note-se que as quotas de mercado no denominador são utilizadas como pesos, podendo ser agregadas para diferentes períodos de tempo.

As equações que se seguem resultam da linearização dos modelos de atracção denominados anteriormente por MNL e MCI, correspondendo a duas novas formas de relativização das variáveis explicativas (v. Cooper e Nakanishi, 1988):

$$X^*_{ik} = \frac{X_{ik}}{\tilde{X}_k} \qquad \textbf{(13)}$$

$$X^*_{ik} = X_{ik} - \overline{X}_k \qquad \textbf{(14)}$$

Na primeira destas equações a variável explicativa para a marca *i* é dividida pela média geométrica dos valores dessa variável, para todos os artigos na família, no período de tempo considerado. Na segunda equação é descontada à variável explicativa a média aritmética dos valores dessa variável, para todos os artigos na família, no mesmo período de tempo ([5]).

Uma outra expressão de relativização utilizada em artigos publicados na área da determinação de elasticidades utilizando modelos de atracção (v. por exemplo Cooper, 1988), e já recomendada num trabalho teórico do mesmo autor (Cooper e Nakanishi, 1988) é a expressão apresentada em seguida ([6]):

$$X^*_{ik} = \frac{X_{ik} - \overline{X}_k}{\sqrt{\frac{\sum_i (X_{ik} - \overline{X}_k)^2}{n}}} = \frac{X_{ik} - \overline{X}_k}{\sigma x_k} \qquad \textbf{(15)}$$

([4]) Um exemplo de aplicação recente desta forma de relativização é apresentado em Hoch *et al.*, 1995. Esta é uma das expressões mais utilizadas na literatura.

([5]) Na utilização prática desta expressão por vezes é necessário trocar os termos de forma a não obter valores negativos que não poderiam ser logaritmizados.

([6]) V. nota de pé de página 5.

onde a barra sobre a variável representa uma média aritmética na dimensão marcas na família e o denominador corresponde ao desvio padrão da variável de *marketing* dentro da família (σ_{X_k}). Esta expressão pretende reflectir o grau de diferenciação de uma marca, relativamente à variabilidade da família, em cada período de tempo.

As expressões de relativização apresentadas não esgotam todas as possibilidades mas são as consideradas neste trabalho.

3 — Elasticidade de quota de mercado

Pode definir-se *elasticidade directa* (e_{ik}) da quota de mercado de um produto ou marca (i) como o quociente entre uma variação relativa da quota de mercado dessa marca (m_i) e a variação relativa de uma variável de *marketing* da mesma marca (X_k); *i.e.* considerando uma definição pontual de elasticidade:

$$e_{ik} = \frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} \cdot \frac{X_{ik}}{m_i} \tag{16}$$

Deste modo a noção de elasticidade corresponde a uma medida da dependência das quotas de mercado relativamente às variáveis explicativas consideradas. A expressão anterior implica um modelo que relacione as quotas de mercado com as variáveis consideradas explicativas e que seja traduzido por funções contínuas. Pode-se portanto utilizar os modelos apresentados entre as expressões **(4)** a **(9)** para este fim. Esta definição permite comparar elasticidades obtidas por modelos tão diversos como os de atracção e os modelos clássicos, já que é aplicável a todos os modelos causais.

É também interessante o estudo da estruturas competitiva entre marcas dentro de um mesmo mercado, já que as assimetrias do mercado se reflectem nos efeitos cruzados entre marcas. Sendo assim, a eficiência de uma marca não se mede apenas na capacidade para aumentar a sua quota de mercado ou vendas, mas também na capacidade de influenciar as quotas de mercado das restantes marcas. Surge assim o conceito de *elasticidade cruzada* (e_{ijk}), como medida do efeito da variação de determinada variável de *marketing* (X_{jk}) por parte de uma marca (j), numa outra (i) da mesma família:

$$e_{ijk} = \frac{\partial m_i}{\partial X_{ijk}} \cdot \frac{X_{jk}}{m_i} \tag{17}$$

Para deduzir as expressões gerais para elasticidades directas e cruzadas, começa-se por derivar as equações **(6)** a **(9)**, substituindo as variáveis de *marketing* por variáveis relativizadas, obtendo-se as seguintes equações genéricas para a elasticidade directa:

Modelo aditivo:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{ik}}{m_i} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_i} \tag{18}$$

Modelo semilogarítmico:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{ik}}{m_i \cdot X_{ik}^*} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_{ik}} \tag{19}$$

Modelo multiplicativo:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{ik}}{X_{ik}^*} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_{ik}} \tag{20}$$

Modelo exponencial:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_{ik}} \tag{21}$$

Como sugerido por Cooper e Nakanishi (1988, p. 71) também os modelos de atracção podem ser utilizados com variáveis relativizadas. A relativização das variáveis explicativas pode ser uma necessidade quando se pretende obter elasticidades cruzadas. Por outro lado a relativização aumentando a variabilidade no tempo das variáveis independentes, pode evitar problemas de colinearidade, como Cooper e Nakanishi sugerem no referido trabalho. No anexo A apresenta-se a dedução das expressões seguintes:

Modelo MCI:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot (1 - m_i) \cdot \frac{X_{ik}}{X_{ik}^*} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_{ik}} - \sum_{l \neq i} \beta_{lk} \cdot m_l \cdot \frac{X_{lk}}{X_{lk}^*} \cdot \frac{\partial X_{lk}^*}{\partial X_{ik}} \tag{22}$$

Modelo MNL:

$$e_{ik} = \beta_{ik} \cdot (1 - m_i) \cdot X_{ik} \cdot \frac{\partial X_{ik}^*}{\partial X_{ik}} - \sum_{l \neq i} \beta_{lk} \cdot m_l \cdot X_{ik} \cdot \frac{\partial X_{lk}^*}{\partial X_{ik}} \tag{23}$$

Todas estas expressões podem ser utilizadas na determinação das elasticidades dos modelos apresentados com variáveis de *marketing* não relativizadas. Para tal basta substituir X_{ik}^* por X_{ik}.

De um modo análogo e utilizando a definição de elasticidade cruzada, obtêm-se as seguintes relações, para os diferentes modelos considerados:

Modelo aditivo:

$$e_{ijk} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{jk}}{m_i} \cdot \frac{\partial X^*_{ik}}{\partial X_{jk}} \tag{24}$$

Modelo semilogaritmico:

$$e_{ijk} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{jk}}{m_i \cdot X^*_{ik}} \cdot \frac{\partial X^*_{ik}}{\partial X_{jk}} \tag{25}$$

Modelo multiplicativo:

$$e_{ijk} = \beta_{ik} \cdot \frac{X_{jk}}{X^*_{ik}} \cdot \frac{\partial X^*_{ik}}{\partial X_{jk}} \tag{26}$$

Modelo exponencial:

$$e_{ijk} = \beta_{ik} \cdot X_{jk} \cdot \frac{\partial X^*_{ik}}{\partial X_{jk}} \tag{27}$$

Para os modelos de atracção tem-se de igual forma, e como deduzido no anexo A, as seguintes expressões:

Modelo MCI:

$$e_{ijk} = -\beta_{jk} \cdot m_j \cdot \frac{X_{jk}}{X^*_{jk}} \cdot \frac{\partial X^*_{jk}}{\partial X_{jk}} - \sum_{l\neq j} \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot \frac{X_{jk}}{X^*_{lk}} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{jk}} \tag{28}$$

Modelo MNL:

$$e_{ijk} = -\beta_{jk} \cdot m_j \cdot X_{jk} \cdot \frac{\partial X^*_{jk}}{\partial X_{jk}} - \sum_{l\neq j} \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot X_{jk} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{jk}} \tag{29}$$

as quais também podem ser utilizadas para a determinação das elasticidades cruzadas, com as variáveis não relativizadas, bastando para tal fazer substituir todos os X^*_{lk} por X_{lk} (com l incluindo j). Nas expressões anteriores δ_{il} representa o símbolo de Kronecker.

Estas expressões para variáveis de *marketing* relativizadas apresentam três componentes como referido por Cooper (1988). No primeiro componente surgem os efeitos directos relativos a j, o segundo componente resultante de l=i

no somatório corresponde a efeitos cruzados específicos, e por fim os restantes componentes do somatório resultam de efeitos competitivos gerais. Estes três termos estão sempre presentes nos modelos de atracção com variáveis de *marketing* relativizadas.

Também para as elasticidades directas as expressões para os modelos de atracção, ao contrário das encontradas para os modelos clássicos, apresentam termos cruzados resultantes de derivadas das expressões para a atracção de uma marca relativamente às variáveis de *marketing* de uma outra.

Utilizando agora as expressões de relativização das variáveis de *marketing* introduzidas no capítulo anterior, podem-se deduzir as derivadas parciais dessas equações relativamente às variáveis não relativizadas e, finalmente, combinando os dois resultados chegar às expressões compiladas no quadro 1 e quadro 2. O primeiro facto a notar nestes quadros é a grande variedade de expressões para as elasticidades directas e cruzadas.

Note-se que para a forma de relativização apresentada nas equações **(11)** e **(12)** quando combinada com os modelos clássicos apresentados de **(6)** a **(9)**, a função m_i surge definida implicitamente, isto porque faz parte do denominador de X_{ik}^{*}.

QUADRO 1

Elasticidades directas pontuais para os diversos modelos e expressões de relativização

Equações de relativização	Modelos de quotas de mercado					
	Aditivo	Semilog.	Multipli.	Expon.	MCI	MNL
Fracção comum	$\beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} / m_i \cdot$ ①	$\beta_{ik} / m_i \cdot$ ①	$\beta_{ik} \cdot$ ①	$\beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} \cdot$ ①	$\beta_{ik} \cdot (1-m_i) \cdot$ ① + $+ \Sigma_{l \neq i} \beta_{lk} \cdot m_l \cdot$ ②	$\beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} \cdot (1-m_i) \cdot$ ① + $+ \Sigma_{l \neq i} \beta_{lk} \cdot m_l \cdot X_{lk}^{*} \cdot$ ②
Variáveis não relativizadas:	① $= 1$				② $= 0$	
Equação **(10)**	① $= 1 - X_{ik}^{*}/n$				② $= X_{ik}^{*}/n$	
Equação **(11)**	① $= 1 - X_{ik}^{*} \cdot m_i'$				② $= X_{ik}^{*} \cdot m_i'$	
Equação **(12)**	① $= 1$				② $= X_{lk}^{*} \cdot X_{ik}/X_{lk} \cdot m_l'/(1-m_i')$	
Equação **(13)**	① $= (n-1)/n$				② $= 1/n$	
Equação **(14)**	① $= (n-1)/n \cdot X_{ik}/X_{ik}^{*}$				② $= 1/n \cdot X_{ik}/X_{lk}^{*}$	
Equação **(15)**	① $= (n-1-X_{ik}^{*\,2}) \cdot X_{ik}^{*}/(n \cdot \sigma_{X_k} \cdot X_{ik}^{*})$				② $= 1/n \cdot X_{ik}/\sigma_{X_k} \cdot (1/X_{lk}^{*} + X_{ik}^{*})$	

Nota. — Para as variáveis não relativizadas X_{ik}^{*} deve ser substituído por X_{ik}. Note-se a diferença entre m_i' apresentado para as equações de relativização **(11)** e **(12)** e m_i da fracção comum. A primeira quota de mercado resulta do denominador da expressão de relativização, o qual pode ser obtido por agregação de valores para períodos de tempo anteriores ao período considerado, e a segunda refere-se à quota de mercado no período em consideração.

QUADRO 2

Elasticidades cruzadas pontuais para os diversos modelos e expressões de relativização

Equações de relativização	Modelos de quotas de mercado					
	Aditivo	Semilog.	Multipli.	Expon.	MCI	MNL
Fracção comum	$-\beta_{jk} \cdot X_{ik}^* / m_i \cdot$ ①	$-\beta_{jk}/m_r$ ①	$-\beta_{jk} \cdot$ ①	$-\beta_{jk} \cdot X_{ik}^* \cdot$ ①	$-\beta_{jk} \cdot (1-m_i) \cdot$ ① $+ \sum_{l \neq j} \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot$ ②	$-\beta_{jk} \cdot X_{ik}^* \cdot (1-m_i) \cdot$ ① $+ \sum_{l \neq j} \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot X_{lk}^* \cdot$ ②
Variáveis não relativizadas:	① $=1$				① $=1$ ② $=0$	
Equação **(10)**......	① $=X_{jk}^*/n$				① $=1-X_{jk}^*/n$ ② $=X_{jk}^*/n$	
Equação **(11)**......	① $=X_{jk}^* \cdot m_j'$				① $=1-m_j' X_{jk}^*$ ② $= X_{jk}^* \cdot m_j'$	
Equação **(12)**......	① $=X_{ik}^* \cdot X_{jk}/X_{ik} \cdot m_j'/(1-m_i')$				① $=1$ ② $=X_{lk}^* \cdot X_{jk}/X_{lk} \cdot m_j'/(1-m_i')$	
Equação **(13)**......	① $=1/n$				① $=(n-1)/n$ ② $=1/n$	
Equação **(14)**......	① $=1/n \cdot X_{jk}/X_{ik}^*$				① $=(n-1)/n \cdot X_{jk}/X_{jk}^*$ ② $=1/n \cdot X_{jk}/X_{lk}^*$	
Equação **(15)**	① $=1/n/\sigma_{X_k} \cdot (X_{jk}/X_{ik}^* + X_{jk} \cdot X_{jk}^*)$				① $=(n-1-X_{jk}^{*\,2}) \cdot X_{jk}\ /n/X_{jk}^*/\sigma_{X_k}$ ② $=1/n/\sigma_{X_k} \cdot (X_{jk}/X_{lk}^* + X_{jk} \cdot X_{jk}^*)$	

Nota. — V. nota do quadro 1.

Assim, a derivação torna-se mais elaborada. No entanto, é possível considerar simplificações: ou se consideram as quotas de mercado do denominador pouco dependentes de variações no tempo das variáveis de *marketing* ou, em alternativa, pode considerar-se uma situação de forte concorrência em que todas as variáveis relativizadas têm valores muito próximos (v. anexo B).

Note-se ainda que se entendermos **(11)** e **(12)** como considerando no denominador as quotas de mercado do momento anterior ou num período de tempo agregado anterior (de outro modo ter-se-iam de utilizar processos iterativos para fazer previsões), então as expressões determinadas para as elasticidades tornam-se exactas.

Como referem Krishnamurthi e Raj (1991), o modelo multiplicativo conduz frequentemente a elasticidades directas constantes no tempo, o que é logicamente pouco aceitável. No quadro 1, tal verifica-se para as expressões **(12)** e **(13)** e para os modelos com variáveis não relativizadas, pelo que estes modelos conduzem a valores de elasticidades apenas aceitáveis em condições muito especiais.

Também os modelos de atracção para variáveis não relativizadas conduzem a elasticidades cruzadas constantes para qualquer marca *i* (com $i \neq j$ e desprezando a influência da marca *i* em m_j), enquanto todos os restantes modelos conduzem a elasticidades que dependem de *i* mais ou menos fortemente. No primeiro caso, acções da marca *j* influenciam todas as restantes marcas de igual modo ([7]). Sendo assim, pode concluir-se que os modelos de atracção

([7]) Esta observação corresponde ao axioma 4 apresentado por Bell, Keeney e Little (1975).

para variáveis simples, descrevem uma situação muito particular de concorrência entre as marcas de uma família. No caso geral esta situação não está de acordo com o que realmente se passa no mercado.

Verifica-se ainda que a utilização de modelos com variáveis relativizadas, possibilita a obtenção de elasticidades cruzadas com o mesmo número de parâmetros das elasticidades directas, o que facilita a aplicação dos modelos. Dada a grande variedade de modelos disponíveis apresenta-se seguidamente o conceito de *robustez* das elasticidades directas, como um possível critério de escolha.

3.1 — Robustez da elasticidade directa

É habitualmente reconhecido que apenas os modelos de atracção obedecem às condições de *consistência lógica* garantindo que as previsões obedecem à restrição de soma e à restrição de intervalo. Pelo contrário, é reconhecido que os modelos clássicos violam frequentemente tais restrições, já que a sua estrutura não garante a tão desejada consistência lógica. No entanto, estes modelos de fácil estimação, ajustam-se bem a muitas situações reais, continuando a merecer a preferencia de gestores e analistas; o que é lícito desde que sejam utilizados com algumas cautelas, evitando cenários em que as variáveis explicativas assumem valores extremos, como afirmam Weverbergh, Naert e Bultez (1987).

Para verificar a robustez das equações da elasticidade vão considerar-se duas observações empíricas, relativamente ao comportamento esperado da elasticidade directa, baseadas nas considerações de Cooper e Nakanishi (1988; pp. 34-35). Segundo estes autores, a elasticidade deve aproximar-se de zero quando a quota de mercado da marca se aproxima de um. É ainda aceite que se torna mais difícil conquistar quota de mercado à medida que o esforço de *marketing*, representado pelas variáveis explicativas, aumenta. Pode dizer-se portanto, que se espera igualmente que a elasticidade tenda para zero quando o valor de X_{ik} tende para infinito.

Importa agora verificar se as expressões deduzidas para as elasticidades cumprem aqueles critérios de robustez o que é apresentado no quadro 3. Observando esse quadro pode concluir-se que, exceptuando os modelos de atracção, a maioria das combinações (expressão de relativização/modelo) é muito pouco robusta, com especial relevo para os resultados com variáveis não relativizadas. No entanto, para os modelos clássicos existe uma expressão de relativização, a equação **(11)**, realmente robusta para todos os modelos.

QUADRO 3

Verificação das regras empíricas para as elasticidades apresentadas por Cooper & Nakanishi (1988)

Equações de relativização	Modelos de quotas de mercado					
	Aditivo	Semilog.	Multiplicati.	Exponencial	MCI	MNL
Variáveis não relativizadas:	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik}$ *b*) $= 1$	*a*) $= \beta_{ik}$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik}$ *b*) $= \beta_{ik}$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik}$ *b*) $= \pm \infty$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(10)**	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} \cdot (1 - X_{ik}^{*}/n)$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot (1 - X_{ik}^{*}/n)$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot (1 - X_{ik}^{*}/n)$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} (1 - X_{ik}^{*}/n)$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(11)**	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(12)**	*a*) $= 0$ *b*) $= 1$	*a*) $= \beta_{ik}$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik}$ *b*) $= \beta_{ik}$	*a*) $= 0$ *b*) $= \pm \infty$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(13)**	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= (n-1)/n$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= \beta_{ik} \cdot (n-1)/n$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= \pm \infty$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(14)**	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik}^{*} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= 1$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} / X_{ik}^{*} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} / X_{ik}^{*} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= \beta_{ik}$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1)/n$ *b*) $= \pm \infty$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$
Equação **(15)**	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1-X_{ik}^{*2}) / /n / \sigma_{X_k}$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1-X_{ik}^{*2}) / /X_{ik}^{*}/n/\sigma_{X_k}$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1-X_{ik}^{*2}) / /X_{ik}^{*}/n/\sigma_{X_k}$ *b*) $= 0$	*a*) $= \beta_{ik} \cdot X_{ik} \cdot (n-1-X_{ik}^{*2}) / /n / \sigma_{X_k}$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$	*a*) $= 0$ *b*) $= 0$

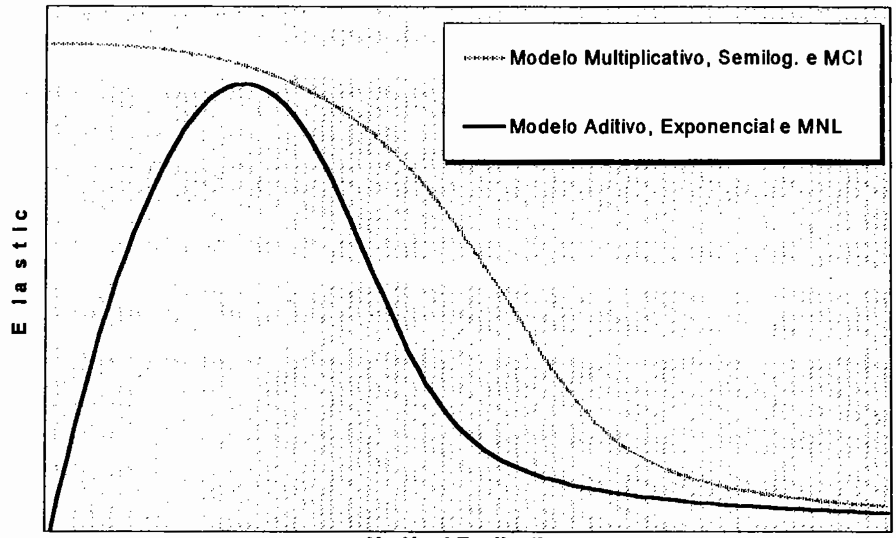
Legenda. — *a*) $\lim_{m_i \to 1} e_{ik}$; *b*) $\lim_{X_{ik} \to \pm\infty} e_{ik}$

Nota. — para a equação de relativização **(11)**, quando m_i tende para um, como a totalidade das quotas de mercado deve somar um, todos os $m_{l \neq j}$ tendem para zero, pelo que a variável relativizada tende para um. Mesmo que os m_l' no denominador de X_{ik}^{*} estejam desfasados no tempo relativamente ao m_i explicado pelo modelo, por arrastamento os primeiros também tenderão para um, ainda que mais lentamente.

Para comparar os modelos robustos construiu-se a figura 1, onde as variáveis explicativas se consideram não relativizadas para os modelos de atracção, e relativizadas por **(11)** para os clássicos. Nesta figura podem-se distinguir dois tipos de comportamentos da elasticidade perante um aumento de uma qualquer variável explicativa. A classe dos modelos *tipo MCI* que inclui o modelo MCI, o modelo multiplicativo e o semilogaritmico, caracteriza-se por um comportamento de descida monotónica da elasticidade com o aumento (ou diminuição) do valor da variável explicativa. Por outro lado temos os modelos *tipo MNL*, onde se incluí não só o modelo MNL como o aditivo e exponencial, caracterizados pela existência de um máximo de elasticidade.

FIGURA 1

Variação da elasticidade com uma variável de *marketing* para os modelos clássicos com a expressão de relativização (11) e para os modelos de atracção



Cooper e Nakanishi (1988, pp. 35-36) consideram que a escolha da classe de modelos mais apropriados para construir previsões de quotas de mercado, depende das variáveis explicativas em consideração. Por exemplo se X_{ik} é o preço do produto ou marca é provável que a elasticidade seja elevada mesmo para preços próximo de zero. Sendo assim, é de esperar que, neste caso, a quota de mercado seja descrita por um modelo *tipo MCI*. Por outro lado se a variável explicativa for dispêndio em publicidade, é de esperar que, para valores baixos, não seja muito eficiente. Deste modo é-se conduzido a modelos *tipo MNL*.

Desta análise, resultam como especialmente apropriados para implementação, os modelos clássicos conjugados com a expressão de relativização **(11)**. As restantes expressões são menos adequadas por não conduzirem a elasticidades robustas ou, no caso dos modelos de atracção, por serem difíceis de estimar.

No entanto, nada garante que o ajuste de um conjunto particular de séries cronológicas a um dos modelos considerados não robustos não seja aceitável, ou mesmo melhor do que o conseguido com os modelos eleitos por esta análise. Sendo assim, só o estudo de casos práticos pode validar as conclusões aqui expostas.

4 — Caso prático

Na tentativa de testar os resultados teóricos anteriores utilizaram-se dados de vendas (POS) duma grande superfície Portuguesa, já objecto de estudo por Barroso (1994). Analisou-se um produto com vendas elevadas, grande sensibilidade ao preço, e pouca diferenciação; na expectativa de obter modelos significativos ao correlacionar quotas de mercado com preços, única variável de *marketing* disponível.

Utilizou-se a análise ABC realizada por Barroso no supracitado trabalho de 1994, para seleccionar a família de produtos com maior volume de vendas — o *arroz* —, responsável por 13% das vendas de mercearia seca. A subfamília do arroz extra-longo escolhida, inclui dois artigos (marcas *Saludães* e *Malandrinho*) que, na loja em causa, se encontravam entre os três primeiros em termos de vendas de mercearia seca. Na altura a que se refere o estudo ainda não existiam marcas brancas nesta subfamília. No entanto, de acordo com Baltas *et al.* (1997), o comportamento das marcas brancas é diferenciado do das restantes marcas; pelo que se crê que os resultados relatados neste estudo ainda são válidos mesmo para famílias ou subfamílias que incluam este tipo de marcas ([8]).

No quadro 4 ([9]) encontram-se os códigos que identificam cada artigo desta subfamília, as marcas a que correspondem, e respectivas quotas médias de mercado em quantidade. Para esta subfamília, dispõe-se de 102 pontos correspondentes a vendas diárias em quantidade, para cada um dos cinco artigos e para o total da subfamília. Estes valores diários estão compreendidos entre Setembro e Dezembro de 1992.

([8]) Do texto apresentado por Baltas *et al.* (1997) e das elasticidades determinadas, directas elevadas (em valores negativos) e cruzadas reduzidas, conclui-se que as marcas brancas não competem directamente com as restantes marcas constituindo um submercado distinto.

([9]) A marca de arroz extra longo *Oriente* foi excluída da restante análise por apresentar vendas muito baixas e consequentemente uma variabilidade muito elevada, não explicada por variações de preço.

QUADRO 4

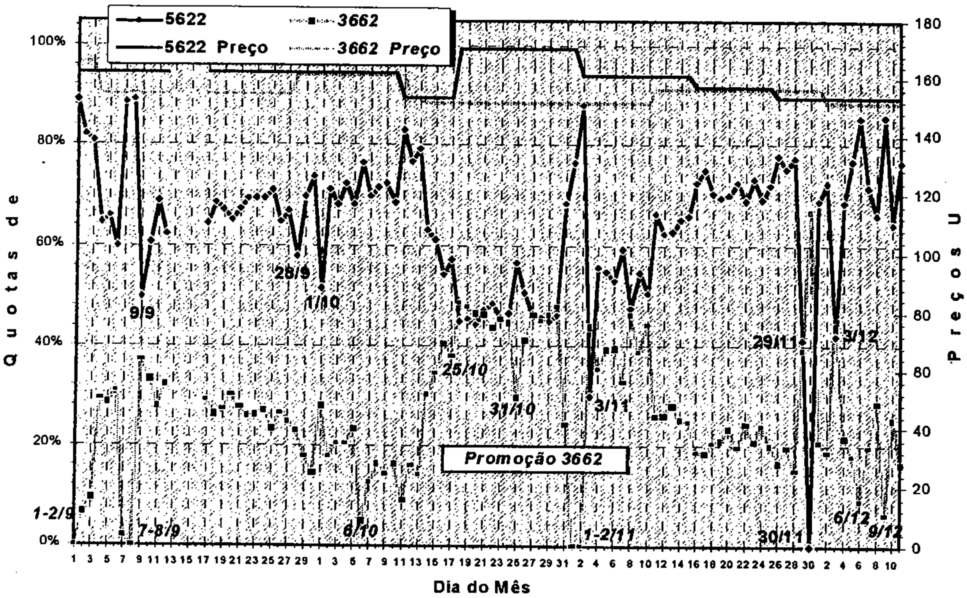
Identificação dos artigos constituintes da subfamília arroz extra-longo

Código	Tipo	Marca	Quantidade	Quota média (percentagem)
5622	Arroz extra longo	*Saludães*	1 kg	63
3662	Arroz extra longo	*Malandrinho*	1 kg	28
3349	Arroz carolino	*Grão de Ouro*	1 kg	5
3347	Arroz carolino	*D. Ana*	1 kg	3
5626	Arroz extra longo	*Oriente*	1 kg	1

Na figura 2 apresentam-se as séries cronológicas de quotas de mercado para as duas marcas mais importantes da subfamília, destacando-se a marca *Saludães,* identificada com o código 5622, como um claro líder. Competindo directamente com o líder encontra-se a marca *Malandrinho* com código 3662. Na figura, observa-se uma clara influência do preço nas vendas, bem como transferência de vendas entre as duas marcas causadas por alterações de preço e roturas de *stock.* A modelação de roturas foi alvo de tratamento especial descrito em Mendes (1996).

FIGURA 2

Quotas de mercado, preços e roturas para os principais artigos da subfamília ([10])



([10]) As datas apresentadas correspondem a dias identificados como existindo roturas. A promoção tem a duração do rectângulo apresentado.

As restantes três marcas são responsáveis por apenas 9% do total das vendas para a subfamília, constituindo estas marcas artigos de características especiais dirigidos a uma clientela leal, a que Raju (1995) chamou *niche brands.*

Como, neste exemplo, as elasticidades pontuais se referem sempre a variações de quotas de mercado resultantes de variações de preço, todas as expressões e modelos deverão levar a valores semelhantes de elasticidade, para uma mesma marca. Dos factores que podem fazer oscilar as elasticidades calculadas, ressaltam a incerteza associada aos parâmetros estimados por cada um dos modelos e a variabilidade no tempo das variáveis incluídas nas diferentes expressões para a elasticidade. Destas últimas, as quotas de mercado (as quais são incluídas nas expressões da elasticidade para os modelos lineares e semilogaritmico) são as que apresentam maior variabilidade no tempo, uma vez que preços e preços relativizados apresentam pouca variabilidade.

As elasticidades apresentadas no quadro 5 foram obtidas a partir de parâmetros estimados pelo método dos mínimos quadrados simples (OLS – *ordinary least squares*) ([11]), o que para os modelos clássicos deu bons resultados, obtendo-se valores de R^2 sempre superiores a 91%. Exceptua-se o caso da marca Carolino (o pior ajuste de entre as marcas analisadas) para o qual os valores de R^2 se situam entre 60 e 65% para o modelo exponencial e 54 a 56% para o modelo aditivo ([12]).

Para os modelos de atracção a estimação de parâmetros apresentou maior dificuldade sendo a linearização obtida seguindo a transformação proposta por Cooper e Nakanishi (1988). Embora as condições de aplicabilidade das técnicas de OLS não sejam inteiramente satisfeitas, devido à existência de heterocedasticidade induzida pela estrutura do modelo, esta não se revelou muito marcada (v. Mendes, 1996), pelo que no quadro 5 se apresentam os resultados para os modelos de atracção também obtidos pelo referido método (para uma descrição completa da metodologia de estimação dos parâmetros e da qualidade dos ajustamentos consultar Mendes, 1996).

Como seria de esperar, os modelos com melhor ajuste (maiores valores de R^2) correspondem a estimativas de elasticidade mais precisas. Nos modelos clássicos, verifica-se sempre uma elevada dependência da incerteza associada às estimativas da elasticidade com a qualidade da regressão. Pelo contrário, para os modelos de atracção os coeficientes de variação são muito semelhantes para todas as marcas e modelos, o que resulta da estimação de parâmetros ser feita simultaneamente para todas as marcas.

([11]) As correlações foram executas utilizando o pacote informático SPSS for Windows Release 6.0, utilizando como variáveis independentes, além do preço ou preço relativo, variáveis que reflectem roturas de *stock* e variáveis dicotómicas para modelação das promoções.

([12]) Apenas se apresentam resultados para o modelo aditivo e exponencial já que os obtidos pelos restantes modelos são muito semelhantes aos apresentados.

Do anteriormente exposto sugere-se a utilização de modelos clássicos com elevados valores de R^2 pelo que nem sempre será possível utilizar a expressão de relativização **(11)** considerada robusta. No entanto, quando ela leva a valores de R^2 elevados, como acontece na marca *Malandrinho,* é possível a escolha da expressão de relativização **(11)** em detrimento de outras mesmo que apresentem valores de R^2 superiores, já que a diferença é pouco significativa.

QUADRO 5

Elasticidade pontual directa e coeficiente de variação, para as marcas com melhor e pior ajuste

Expressão de relativização	Aditivo		Exponencial		MNL		MCI	
	Elasti.	Coef.var	Elasti.	Coef.var	Elasti.	Coef.var	Elasti.	Coef.var
	Marca 5622 — Arroz extra longo *Saludães*							
Preço não rel.	-1,8	0,12	-1,8	0,12	-1,4	0,26	–	–
Equação **(10)**	-2,0	0,10	-2,0	0,10	-1,3	0,36	-1,3	0,36
Equação **(11)**	-1,8	0,10	-1,9	0,10	-2,7	0,25	-2,7	0,25
Equação **(12)**	-1,6	0,11	-1,7	0,11	-2,3	0,28	-2,3	0,29
Equação **(13)**	-2,0	0,10	-2,1	0,11	-1,4	0,42	-1,3	0,43
Equação **(14)**	-1,9	0,10	-1,9	0,11	-1,3	0,41	–	–
Equação **(15)**	-2,3	0,10	-2,4	0,10	-1,5	0,39	-1,6	0,40
	Marca 3347 — Arroz carolino *D. Ana*							
Preço não rel.	-2,3	0,77	-3,2	0,52	-6,9	0,26	–	–
Equação **(10)**	-4,2	0,40	-6,8	0,27	-8,9	0,24	-9,9	0,24
Equação **(11)**	-1,1	1,89	-2,3	0,77	-6,3	0,32	-6,3	0,32
Equação **(12)**	-1,7	1,21	-2,3	0,76	-5,9	0,36	-5,9	0,36
Equação **(13)**	-4,8	0,41	-7,3	0,27	-7,8	0,31	-8,5	0,31
Equação **(14)**	-5,3	0,36	-7,7	0,23	-9,9	0,25	–	–
Equação **(15)**	-5,0	0,41	-7,0	0,28	-7,5	0,36	-7,4	0,37

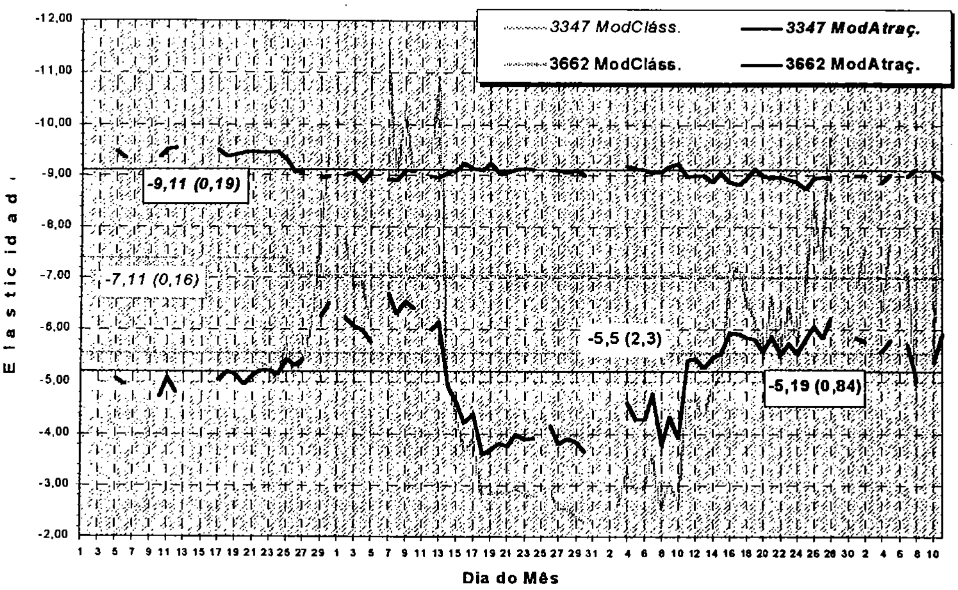
Nota. — O coeficiente de variação é o rácio entre o desvio padrão e a elasticidade estimados pela a expressão e modelo respectivo. Não se apresentam todos os valores para o modelo MCI por, devido a problemas de autocorrelação, não ter sido possível determinar alguns deles. Utilizaram-se valores médios no tempo para as variáveis.

Verifica-se que a selecção de um modelo e de uma expressão de relativização implica a escolha de uma relação funcional de dependência indirecta no tempo, para a elasticidade e logo de uma estrutura competitiva para a marca, como reconhecido por Russell e Kamakura (1992). Do gráfico apresentado na figura 3 pode observar-se a coincidência tanto dos valores obtidos, como dos comportamentos, no tempo, das curvas de elasticidade para os dois tipos de modelos considerados, o que valida de algum modo a análise e o procedimento utilizado. Pode observar-se ainda a menor variação no tempo das elasticidades obtidas pelos modelos de atracção devido à introdução nestes modelos de termos referentes a todas as marcas na subfamília. Podendo esses termos ter sinais opostos, verifica-se um efeito de compensação, que estabiliza a variação das elasticidades no tempo.

Destes resultados e dos apresentados no ponto anterior, parece poder concluir-se que as elasticidades obtidas utilizando valores médios, no tempo, das variáveis que intervêm nas expressões da elasticidade são muito semelhantes aos valores médios da elasticidade no tempo, como os apresentados na figura 3. É por isso que autores como Greene (1993), demonstram a tendência assimptótica das duas medidas para coincidir com a elasticidade real e aconselham, pela sua simplicidade, a utilização das médias das variáveis no tempo.

FIGURA 3

Variação da elasticidade no tempo com indicação de valores médios e correspondente desvio padrão ([13])



Assim, utilizando apenas esses valores, foi possível a construção do quadro 6, onde se apresentam as elasticidades directas e cruzadas calculadas pelos modelos clássicos e de atracção. Neste quadro, as linhas resumem a influência dos preços de outras marcas na quota de mercado da marca *i* e as colunas o efeito das variações de preço da marca *j* nas vendas das restantes marcas.

Comparando os dois tipos de modelos, verifica-se que as maiores diferenças ocorrem para os efeitos nas quotas de mercado da marca *Malandrinho* por variações de preço da marca líder *(Saludães)*, em que o valor obtido pelos modelos de atracção é bastante inferior ao obtido pelos modelos clássicos; e o

([13]) Para a marca *D. Ana* (3347) utilizou-se o modelo exponencial com a equação de relativização **(14)** e para a marca *Malandrinho* (3662) o modelo linear e a expressão **(11)**.

efeito de variações de preço da marca *D. Ana* na quota de mercado da marca *Grão de Ouro,* onde a diferença dos valores obtidos pelos dois tipos de modelos é em sentido contrário. Em ambos os casos os resultados obtidos pelos modelos clássicos são mais facilmente aceites.

QUADRO 6

Elasticidade directa e cruzada pelos modelos clássicos e de atracção

Variação de quota de mercado (Δm_i)	Variações de preço (ΔP_j)			
	5622	*3662*	*3349*	*3347*
Modelos clássicos (com preço relativizado)				
Saludães (5622)	-1,8	1,32	0,28	0,16
Malandrinho (3662)	3,92	-4,7	0,35	0,20
Grão de Ouro (3349)	6,39	2,61	-14	0,33
D. Ana (3347)	1,92	1,70	1,67	-7,7
Modelos de atracção (com preço relativizado)				
Saludães (5622)	-1,3	1,72	0,76	*-0,20*
Malandrinho (3662)	1,91	-5,6	1,24	0,24
Grão de Ouro (3349)	4,08	3,99	-20	2,16
D. Ana (3347)	2,21	2,40	1,54	-8,8

Nota. — Na diagonal apresentam-se elasticidades directas, todas as restantes são cruzadas.

Na verdade, tendo em conta a relação de forças entre as marcas *Malandrinho* e *Saludães* é de esperar que a segunda influencie mais fortemente as vendas da primeira do que o inverso. Também a marca *D. Ana,* sendo pouco expressiva, deverá ter dificuldades em influenciar as vendas da marca *Grão de Ouro* na dimensão prevista pelos modelos de atracção. Por outro lado, os modelos de atracção estimam uma elasticidade negativa, o que é de todo inaceitável.

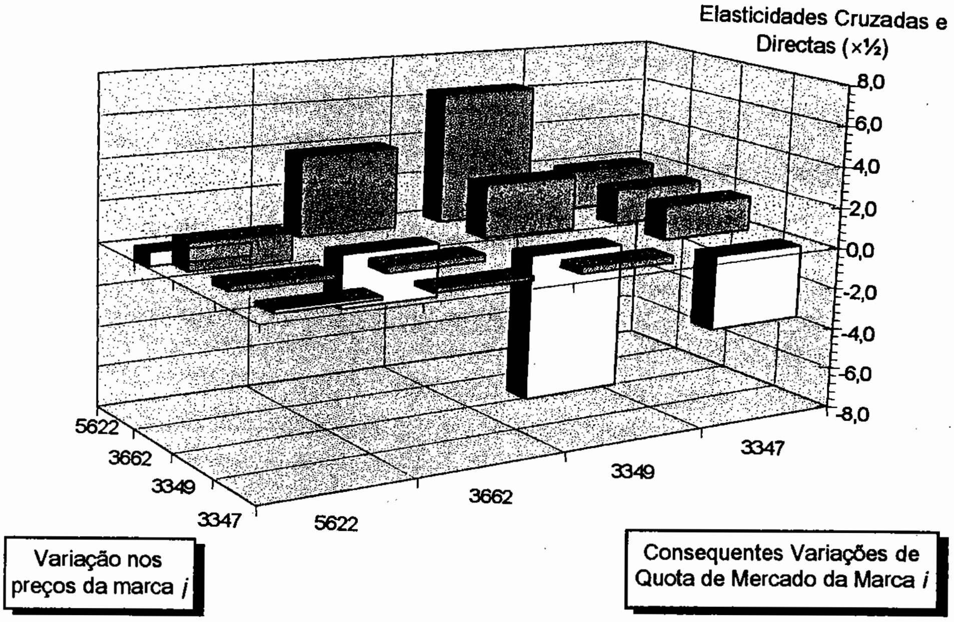
Como referido por Cooper (1988) as elasticidades resumem o efeito das condições do mercado nas vendas ou quotas de mercado. Este efeito de síntese e consolidação de elevada quantidade de dados em valores ou mapas úteis à tomada de decisão é de interesse tanto a nível teórico como prático, como se verifica pela quantidade de trabalhos efectuados sobre elasticidades.

A análise de elasticidades é habitualmente efectuada apresentando os dados do quadro 6 na forma de gráficos, com o nome genérico de mapas competitivos (Cooper, 1988), como se faz na figura 4. Assim, na figura, é evidente uma acentuada assimetria das elasticidades cruzadas. Isto significa que a marca *Saludães* (5622) pode facilmente construir quota de mercado à custa de marcas como *Malandrinho* (3662) e *Grão de Ouro* (3349). Pelo contrário, estas marcas têm um efeito muito reduzido na quota de mercado do líder.

A política de gestão da loja deve ter em consideração que os produtos mais sensíveis ao preço, como a marca *Grão de Ouro,* devem apresentar preços menores enquanto os restantes podem apresentar preços superiores — Hoch *et al.* (1995).

FIGURA 4

Mapa competitivo primário, utilizando os resultados obtidos no caso de estudo para os modelos clássicos ([14])



5 — Conclusões

Utilizando elasticidades de quotas de mercado e combinando diversos modelos com uma grande variedade de expressões de relativização de variáveis de *marketing*, obtêm-se primeiro as expressões das elasticidades directas e cruzadas para cada combinação de modelo e expressão de relativização. Essas expressões são posteriormente comparadas utilizando a robustez como critério. Assim, conclui-se que não só os modelos de atracção são sempre robustos mas também alguns modelos clássicos o podem ser, nomeadamente quando combinados com a expressão de relativização **(11)** (quociente entre a variável e a sua média na família, ponderada pelas quotas de mercado).

Para confrontar resultados teóricos com a modelação de uma situação concreta, utilizou-se o caso de estudo de uma subfamília com cinco artigos apresentando valores de quotas de mercado médias muito distintos. Para esta subfamília foi possível verificar que a utilização da expressão de relativização identificada como robusta é possível, já que as estimativas dos parâmetros são pelo menos tão precisas como as obtidos pelos modelos estatisticamente mais

([14]) Utilizaram-se os dados de elasticidades cruzadas do quadro 6 para os modelos clássicos enquanto os valores para elasticidades directas foram divididos por dois por uma questão de escala.

bem ajustados para cada marca. Apenas para marcas que vendem muito pouco (quotas de mercado médias abaixo dos 10%), se pode revelar necessário a utilização de outras expressões de relativização, por os parâmetros estimados pela expressão robusta apresentarem desvios padrão demasiado elevados. Verificou-se que os modelos clássicos são fáceis de estimar, revelando uma elevada capacidade explicativa das quotas de mercado. Pelo contrário, os modelos de atracção, muito utilizados na literatura consultada, são de difícil estimação não tendo sido possível obter estimativas de elasticidade em alguns casos e apresentando um problema de heterocedasticidade difícil de ultrapassar.

Este trabalho vem realçar o papel das elasticidades na análise do mercado utilizando quotas de mercado. A importância das elasticidades deriva não só de serem medidas da sensibilidade das quotas de mercado a variações das diferentes variáveis de *marketing*, como também de serem medidas universais independentes do modelo causal escolhido para a modelação.

Trabalhos futuros envolverão a modelação de um maior número de famílias de produtos. Se os modelos clássicos com vaviáveis relativizadas por **(11)** se revelarem um método expedito para a determinação de elasticidades, pretende-se efectuar a actualização do sistema de apoio à decisão da loja, para que possa realizar este cálculo de forma automática ou semiautomática.

BIBLIOGRAFIA

BALTAS, G, DOYLE, P., e DYSON, P. (1997), «A Model of Consumer Choice for National *vs.* Private Brandes», *Journal of the Operational Research Society*, vol. 48, pp. 955-988.

BARROSO, Ana Paula F. (1994), «Um Modelo de Previsão de Vendas para o Retalho Alimentar», tese de mestrado, IST, Lisboa.

BELL, David E., KEENEY, Ralph L., e LITTLE, John D. C. (1975), «A Market Share Theorem» *Journal of Marketing Research*, vol. 12, pp. 136-141.

BRODIE, Roderick, e De KLUYVER, Cornelis A. (1984), «Attraction versus linear and multiplicative market share models: An empirical evaluation», *Journal of Marketing Research*, vol. 21 (5), pp. 194-201.

COOPER, Lee G. (1988), «Competitive maps: The structure underlying asymmetric cross elasticities», *Management Science*, vol. 6 (34), pp. 707-723.

COOPER, Lee G., e NAKANISHI, Masao (1988), «Market-Share Analysis: Evaluating Competitive Marketing Effectiveness», *International Series in Quantitative Marketing*, 1.ª ed., Kluwer Academic Publishers, Boston.

GREENE, W. (1993), *Econometric Analysis*, Macmillan.

HOCH, Stephen J., KIM, Byung-Do, MONTGOMERY, Alan L., e ROSSI, Peter E. (1995), «Determinants of Store-Level Price Elasticity», *Journal of Marketing Research*, vol. 22, pp. 17-29

KOTLER, Philip (1984), *Marketing Management: Analysis, Planning, and Control*, Englewood Cliffs, 5.ª ed., Prentice-Hall, Inc., NJ.

KRISHNAMURTHI, Lakshman, e RAJ, S. P. (1991), «An empirical analysis of the relationship between brand loyalty and consumer price elasticity», *Marketing Science*, vol. 10 (2), pp. 172-183.

LUZES, Diogo Furtado (1995), «Modelação de vendas de produtos hortofrutículas», publicação interna do CESUR, IST.

MENDES, Armando B. (1996), «Modelação do Efeito do Preço nas Vendas de Produtos de Grande Consumo», tese de mestrado, IST, Lisboa.

NAERT, Philippe A., e LEEFLANG, Peter S. H. (1978), *Building Implementable Marketing Models*, Martinus Nijhoff Social Sciences Division, Boston.

ORAL, Muhittin, e KETTANI, Ossama (1989), «A mathematical programming model for market share prediction», *International Journal of Forecasting*, vol. 5 (1), pp. 59-68.

RAJU, Jagmohan S. (1995), «Theoretical models of sales promotions: Contributions, limitations, and a future research agenda», *European Journal of Operational Research*, vol. 85, pp. 1-17.

RUSSELL, Gary J., e KAMAKURA, Wagner A. (1992), «Understanding brand competition using micro and macro scanner data», não publicado.

THEMIDO, Isabel M. Hall (1984), «Pricing and Inventory Control in Retailing», tese de doutoramento, University of Lancaster, UK.

WEVERBERGH, M., NAERT, P., e BULTEZ, A. (1987), «Logically Consistent Market Share Models Revisited», *Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, vol. 21 (1), pp. 3-37.

ANEXO A

Derivação das elasticidades directas e cruzadas para os modelos de atracção

A dedução das expressões para as elasticidades directas e cruzadas, usando variáveis explicativas não relativizadas, é apresentada em Cooper e Nakanishi (1988). Seguindo um procedimento semelhante é possível deduzir expressões de elasticidades para modelos com variáveis relativizadas. Sendo assim, ter-se-á respectivamente para as elasticidades directas e cruzadas as seguintes expressões:

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} = \frac{m_i}{A_i}\left[(1-m_i)\frac{\partial A_i}{\partial X_{ik}} - m_i \cdot \sum_{l\neq i}\frac{\partial A_l}{\partial X_{ik}}\right] \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{jk}} = \frac{m_j}{A_j}\left[(1-m_i)\frac{\partial A_i}{\partial X_{jk}} - m_i \cdot \frac{\partial A_j}{\partial X_{jk}} - m_i \cdot \sum_{l\neq i,j}\frac{\partial A_l}{\partial X_{jk}}\right] \tag{A.2}$$

onde A_i representa a atractividade da marca i, m_i a sua quota de mercado e X_{ik} ou X_{jk} a variável de *marketing* em ordem à qual se deriva a expressão das quotas de mercado.

As derivadas parciais dos termos de atracção, podem ser facilmente determinadas, se se considerarem as relações funcionais correspondentes a cada um dos modelo de atracção. Sendo assim, respectivamente para o modelos MCI e MNL, tem-se:

$$\frac{\partial A_l}{\partial X_{ik}} = \frac{\beta_{lk}\cdot A_l}{X^*_{lk}} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{ik}} \quad l=1,\dots,\ i,\dots,\ n \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial A_l}{\partial X_{ik}} = \beta_{lk}\cdot A_l \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{ik}} \quad l=1,\dots,\ i,\dots,\ n \tag{A.4}$$

Substituindo estas últimas equações em **(A.1)**, e transformando as derivadas parciais em elasticidade, obtêm-se finalmente as seguintes expressões para as elasticidades directas do modelo MCI e MNL respectivamente:

$$e_{ik} = -\sum_l \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot \frac{X_{ik}}{X^*_{lk}} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{ik}} \tag{A.5}$$

$$e_{ik} = -\sum_l \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot X_{ik} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{ik}} \tag{A.6}$$

onde δ_{il} representa o símbolo de Kronecker. Para as elasticidades cruzadas, basta substituir **(A.3)** e **(A.4)** em **(A.2)**, obtendo-se as equações seguintes:

$$e_{ijk} = -\sum_l \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot \frac{X_{jk}}{X^*_{lk}} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{jk}} \tag{A.7}$$

$$e_{ijk} = -\sum_l \beta_{lk} \cdot (m_l - \delta_{il}) \cdot X_{jk} \cdot \frac{\partial X^*_{lk}}{\partial X_{jk}} \tag{A.8}$$

Estas expressões são as mais gerais, sendo de grande simplicidade a sua redução às expressões obtidas para modelos com variáveis não relativizadas.

ANEXO B

Justificação da aproximação usada no cálculo da elasticidade com as expressões de relativização (11) e (12)

Para fazer a derivação da expressão para a quota de mercado em função da variável de *marketing*, vai utilizar-se o conceito de função implícita, já que para as expressões de relativização **(11)** e **(12)** não é possível explicitar a quota de mercado apenas em função de X_{ik}. Considerem-se primeiro as variáveis relativizadas pela expressão **(11)**, que se rescreve fixando k e i:

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik}}{\alpha_k} \tag{B.1}$$

$$\alpha_k = m_i \cdot X_{ik} + \sum_{i' \neq i} m_{i'} \cdot X_{i'k} \qquad i' = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \tag{B.2}$$

e, para todos os $k' \neq k$ a expressão de relativização não inclui X_{ik}, pelo que se tem simplesmente:

$$X_{ik}^{*} = \frac{X_{ik'}}{\alpha_{k'}} \tag{B.3}$$

$$\alpha_{k'} = \sum_{l} m_l \cdot X_{lk'} \qquad l = 1, \ldots, i, \ldots, n \tag{B.4}$$

Teremos agora de considerar cada um dos modelos em separado. Far-se-á a demonstração apenas para o modelo multiplicativo, já que para os restantes os resultados seriam semelhantes, uma vez que se verificam relações multiplicativas entre as expressões derivadas para as elasticidades dos diferentes modelos (v. quadro 1). Para este modelo tem-se:

$$m_i = \alpha_i \cdot X_{ik}^{*\beta_{ik}} \cdot \prod_{k' \neq k} X_{ik'}^{*\beta_{ik'}} \tag{B.5}$$

Substituindo **(B.1)** e **(B.3)** em **(B.5)**, tem-se:

$$m_i = \alpha_i \cdot \left(\frac{X_{ik}}{\alpha_k}\right)^{\beta_{ik}} \cdot \prod_{k' \neq k} \left(\frac{X_{ik'}}{\alpha_{k'}}\right)^{\beta_{ik'}} \tag{B.6}$$

Pretende-se derivar a expressão anterior relativamente a X_{ik}. Para tal, reconhece-se que os $\alpha_{k'}$ e α_k são função de m_i, pelo que se terá de utilizar o método da derivação da função implícita. Considerando ainda m_i função composta por $\alpha_{k'}$ e α_k tem-se:

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} = \frac{\beta_{ik} \cdot m_i}{X_{ik'} \cdot \alpha_{ik}} \cdot \left(1 - X_{ik}^{*} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial X_{ik}}\right) - \sum_{k' \neq k} \left(\frac{\beta_{ik'} \, m_i}{\alpha_{k'}} \cdot \frac{\delta \alpha_{ik'}}{\delta X_{ik}}\right) \tag{B.7}$$

Podem-se agora determinar as derivadas de $\alpha_{k'}$ e de α_k obtendo-se as expressões seguintes:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial X_{ik}} = m_i + \sum_{i' \neq i} \frac{\partial m_{i'}}{\partial X_{ik}} \cdot X_{i'k} \tag{B.8}$$

$$\frac{\partial \alpha_{k'}}{\partial X_{ik}} = \sum_{l} \frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot X_{lk'} \tag{B.9}$$

substituindo agora **(B.8)** e **(B.9)** em **(B.7)**, e tendo em conta ainda as equações **(B.1)** e **(B.3)** tem-se com h incluindo k:

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} = \frac{\beta_{ik} \cdot m_i}{X_{ik}} \cdot (1 - m_i \cdot X_{ik}^{*}) - \sum_{h} \left(\beta_{ih} \cdot m_i \cdot \sum_{l} \left(\frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot X_{lh}^{*}\right)\right) \qquad h = 1, \ldots, k, \ldots, n \tag{B.10}$$

Considerando que as quotas de mercado do segundo termo da equação anterior são agregadas e logo pouco sensíveis a variações das variáveis de *marketing*, e utilizando a expressão para a elasticidade pontual, pode-se obter a expressão correspondente do quadro 1. Vai-se agora provar que esta aproximação não é necessária se se considerar uma situação fortemente concorrencial, com pouca distinção entre marcas, *i. e.* valores de cada uma das variáveis relativizadas para cada artigo aproximadamente iguais.

Da expressão fundamental, pode-se escrever uma qualquer quota de mercado como:

$$m_j = 1 - \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} m_i \qquad \textbf{(B.11)}$$

introduzindo esta expressão na fracção de **(B.10)** com derivadas parciais, tem-se:

$$\sum_{l}\left(\frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot X_{lh}^*\right) = \sum_{l' \neq j}\left(\frac{\partial m_{l'}}{\partial X_{ik}} \cdot \left(X_{l'h}^* - X_{jh}^*\right)\right) \qquad \textbf{(B.11)}$$

Deste modo se a diferença anterior se anular, o que pode suceder em situações de forte concorrência em que os valores relativizados de cada variável são aproximadamente iguais para as diferentes marcas da família em consideração; não é necessário considerar a aproximação de anular as derivadas das quotas de mercado no denominador relativamente a X_{ik}. Fica, assim, provado o que se pretendia.

Considere-se agora as variáveis relativizadas pela expressão **(12)**, que se rescrevem considerando k e i constantes:

$$X_{ik}^* = \frac{X_{ik}}{\alpha_k} \qquad \textbf{(B.13)}$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\sum_{i' \neq i} m_{i'} \cdot X_{i'k}}{\sum_{i' \neq i} m_{i'}} \qquad \textbf{(B.14)}$$

note-se que ao contrário da equação **(B.2)**, esta última equação é válida para todos os valores de k, e nunca é possível explicitar X_{ik} nesta equação. Fazendo a derivação da equação anterior tem-se para qualquer h igual ou diferente de k:

$$\frac{\partial \alpha_{ih}}{\partial X_{ik}} = \frac{\sum_{i' \neq i}\left(\frac{\partial m_{i'}}{\partial X_{ik}} \cdot \left(X_{i'k} - \alpha_{ih}\right)\right)}{\sum_{i' \neq i} m_{i'}} \qquad h=1,\ldots, k,\ldots, n \qquad \textbf{(B.15)}$$

rescrevendo a equação **(B.7)** para o caso particular que se tem vindo a tratar:

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} = \frac{\beta_{ik} \cdot m_i}{X_{ik}^* \cdot \alpha_{ik}} - \sum_{h}\left(\frac{\beta_{ih} \cdot m_i}{\alpha_{ih}} \cdot \frac{\partial \alpha_{ih}}{\partial X_{ik}}\right) \qquad \textbf{(B.16)}$$

substituindo agora **(B.15)** na expressão anterior, e tendo em conta ainda a equação **(B.13)**, tem-se com h incluindo todas as variáveis de *marketing*:

$$\frac{\partial m_i}{\partial X_{ik}} = \frac{\beta_{ik} \cdot m_i}{X_{ik}} - \frac{m_i}{\sum_{l \neq i} m_l} \cdot \sum_{h}\left(\beta_{ih} \cdot \sum_{l \neq i}\left(\frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot \left(\frac{X_{lh}}{\alpha_{ih}} - 1\right)\right)\right) \qquad h=1,\ldots,k,\ldots,n \qquad \textbf{(B.17)}$$

Esta expressão é facilmente reduzida à equação correspondente do quadro 1, considerando de novo as quotas de mercado no denominador da expressão de relativização como pesos agregados e logo pouco variáveis com a variável de derivação, e utilizando a expressão para a elasticidade pontual do modelo multiplicativo.

Da equação anterior verifica-se que a referida aproximação não é necessária quando todas as variáveis relativizadas são aproximadamente 1, i. e. quando todas as variáveis na família, com a excepção da marca *i*, são muito próximas. Em famílias muito equilibradas, ou sofrendo forte concorrência onde uma marca líder domina, tal é aceitável. Desenvolvendo o último somatório, é possível chegar a essa conclusão de forma mais clara, como se indica de seguida:

$$\sum_{l \neq i} \left(\frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot \left(\frac{X_{lh}}{\alpha_{ik}} - 1 \right) \right) = \frac{1}{\sum\limits_{l \neq i} m_l \cdot X_{lh}} \cdot \sum_{l \neq i} \left(\frac{\partial m_l}{\partial X_{ik}} \cdot \sum_{j \neq i,l} m_j \cdot \left(X_{lh} - X_{jh} \right) \right) \qquad \textbf{(B.18)}$$

Note-se que para chegarmos a esta conclusão não foi necessário considerar a expressão fundamental. Nas comparações entre variáveis, não se incluí a correspondente à marca sobre a qual pretendemos calcular a elasticidade, pelo que ao contrário da expressão de relativização **(10)** esse artigo pode assumir uma posição diferenciada sem que a aproximação seja posta em causa.